COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU"
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a XIII-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018
CLASA a IX-a

Subiectul 1.

Demonstraţi că dacă $x, y, z > 0$ şi $x \cdot y \cdot z = 8$, atunci:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 2 \cdot x \cdot \sqrt{z+y} + 2 \cdot y \cdot \sqrt{x+z} + 2 \cdot z \cdot \sqrt{x+y}$$

Subiectul 2.

Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$(x + \{x\})^2 - (x + \{x\}) = 6 \cdot [x] \cdot \{x\} - 1,$$

unde $\{a\}$, $[a]$ reprezintă partea fracţionară, respectiv partea întreagă a numărului real a .

Subiectul 3.

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi $D \in [BC]$ astfel încât triunghiurile ABD şi ACD au acelaşi perimetru. Punctele E, F sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiul ABD, respectiv ACD. Arătaţi că $\overrightarrow{EF} = \frac{m}{m+p} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{c-b}{p+m} \overrightarrow{DA}$, unde p reprezintă semiperimetrul triunghiului ΔABC, iar m este lungimea segmentului $[AD]$.

Subiectul 4.

În triunghiul ABC, cevienele AA', BB', CC' sunt concurente în M. Arătaţi că dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$, atunci M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Notă:

1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XIII-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018
BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

Subiectul 1.

Demonstrați că dacă $x, y, z > 0$ și $x \cdot y \cdot z = 8$, atunci:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 2 \cdot x \cdot \sqrt{z+y} + 2 \cdot y \cdot \sqrt{x+z} + 2 \cdot z \cdot \sqrt{x+y}$$

Soluție:

Avem

$x^3 + y^3 \geq x \cdot y \cdot (x+y) \Longrightarrow \frac{x^3+y^3}{x \cdot y \cdot z} \geq \frac{x \cdot y \cdot (x+y)}{x \cdot y \cdot z} \Leftrightarrow \frac{x^3+y^3}{8} \geq \frac{x+y}{z}$. **3p**

$\Longrightarrow \frac{x^3+y^3}{8} + \frac{z^3}{4} \geq \frac{x+y}{z} + \frac{z^3}{4}$ **2p**

$MA \geq MG \implies \frac{x+y}{z} + \frac{z^3}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x+y}{z} \cdot \frac{z^3}{4}} = \sqrt{(x+y) \cdot z^2} = z\sqrt{x+y}$

Deci $\frac{x^3+y^3}{8} + \frac{z^3}{4} \geq z\sqrt{x+y}$ **1p**

Analog, $\frac{x^3+z^3}{8} + \frac{y^3}{4} \geq y\sqrt{x+z}$,

$\frac{z^3+y^3}{8} + \frac{x^3}{4} \geq x\sqrt{z+y}$

Însumând cele trei relații și înmulțind relația cu 2, se obține inegalitatea cerută. **1p**

Subiectul 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$(x + \{x\})^2 - (x + \{x\}) = 6 \cdot [x] \cdot \{x\} - 1,$$

unde $\{a\}$, $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a .

Soluție:

[x]=a, $a \in \mathbb{Z}$, {x}=b $\in [0,1)$

Avem $(a+2b)^2 - (a+2b) = 6 \cdot a \cdot b - 1 \Leftrightarrow a^2 - a(2b+1) + 4b^2 - 2b + 1 = 0$ **2p**

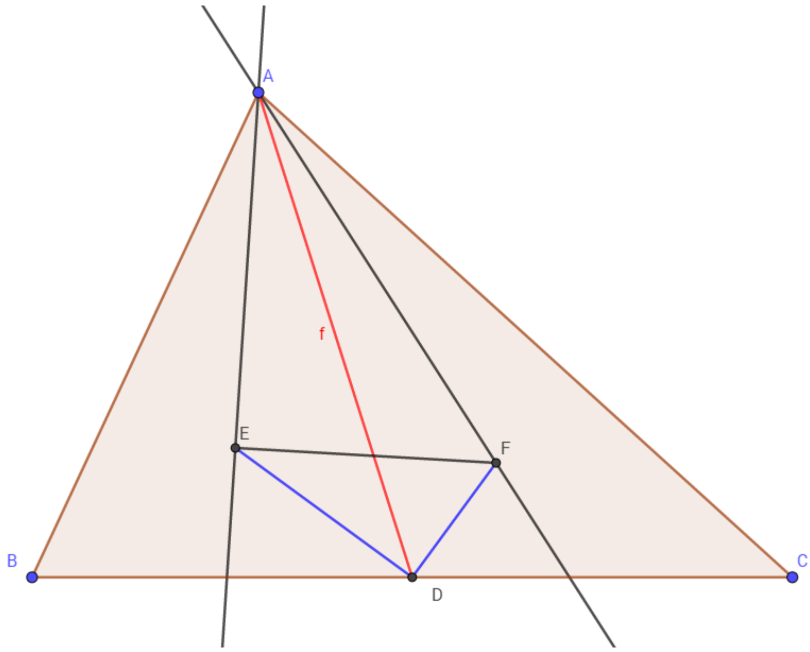
$\Delta = 4b^2 + 4b + 1 - 16b^2 + 8b - 4 \Longrightarrow \Delta = -3(2b-1)^2 \leq 0$ **2p**

Dar $a \in \mathbb{Z}$, deci $\Delta \geq 0$, asadar, $\Delta = 0 \implies b = \frac{1}{2} \in [0,1)$, $a = 1 \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{3}{2}$ **3p**

Subiectul 3.

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și $D \in [BC]$ astfel încât triunghiurile ABD și ACD au același perimetru. Punctele E, F sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiul ABD, respectiv ACD. Arătați că $\overrightarrow{EF} = \frac{m}{m+p} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{c-b}{p+m} \overrightarrow{DA}$, unde p reprezintă semiperimetrul triunghiului ΔABC, iar m este lungimea segmentului $[AD]$.

Soluție:



Fie $q > 0$ perimetrul triunghiului ABD, respectiv ACD. Deci $q = p + m$. **1p**

Facem notațiile $b = |\overrightarrow{AC}|$ |, $c = |\overrightarrow{AB}|$, $x = |\overrightarrow{BD}|$ $m = |\overrightarrow{AD}|$. Atunci $|\overrightarrow{DC}| = c + x - b$.

Punctul E este centrul cercului înscris în triunghiul ABD, deci

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{q} \cdot (x \cdot \overrightarrow{DA} + m \cdot \overrightarrow{DB})$ **2p**

Punctul F este centrul cercului înscris în triunghiul ACD, deci

$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{q} \cdot [(c + x - b) \cdot \overrightarrow{DA} + m \cdot \overrightarrow{DC}]$ **2p**

Avem

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE} = \frac{1}{q}\left((c-b) \cdot \overrightarrow{DA} + m \cdot \left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}\right)\right) = \frac{1}{q} \cdot \left((c-b) \cdot \overrightarrow{DA} + m \cdot \overrightarrow{BC}\right)$$

De unde rezultă, $\overrightarrow{EF} = \frac{m}{m+p} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{c-b}{p+m} \overrightarrow{DA}$. **2p**

Subiectul 4.

În triunghiul ABC, cevienele AA', BB', CC' sunt concurente în M. Arătați că dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$, atunci M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Soluție:

Fie $M(\alpha, \beta, \gamma)$ coordonatele baricentrice absolute ale punctului M. Vom presupune că M nu se găsește pe niciuna din laturile triunghiului ABC, deci $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Atunci A\`, $B$\`,C\` au coordonatele baricentrice absolute $A`\left(0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right), B`\left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, 0, \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right), C`\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}, 0\right)$ **2p**

Rezultă că, $\overrightarrow{AA`} + \overrightarrow{BB`} + \overrightarrow{CC`} = \frac{\beta}{\beta+\gamma} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{CB}$

$= \left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \cdot \overrightarrow{AC}$ **2p**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro
COLEGIUL NATIONAL VASILE LUCACIU

Egalitatea din enunț și necoliniaritatea punctelor *A*,*B*,*C* implică atunci că :

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}=1, \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}=1$$ **1p**

Obținem că $\beta^2=\alpha\cdot\gamma$ și $\gamma^2=\alpha\cdot\beta$ de unde rezultă că $\alpha=\beta=\gamma$. Punctul *M* este deci centrul de greutate al triunghiului *ABC*. **2p**